Početní část 1 - 18.1.2021

1. Pomocí standardních limit

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{\log(x+x^{100})-\log 2}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{\log\frac{x+x^{100}}{2}}\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{\frac{x+x^{100}-2}{2}}\frac{\frac{x+x^{100}-2}{2}}{\log(1+\frac{x+x^{100}-2}{2})}\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{x+x^{100}-2}\lim_{x\to1}\frac{\frac{x+x^{100}-2}{2}}{\log(1+\frac{x+x^{100}-2}{2})}\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+x^{100}-2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\frac{x^{100}-1}{x-1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sum_{i=0}^{99}x^i}=\frac{2}{101\sqrt{5}}$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla - limita 0/0

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}{\log(x+x^{100})-\log 2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(6-x)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1+100x^{99}}{x+x^{100}}}=\frac{2}{101\sqrt{5}}$$

2. Definiční obor funkce argcosh je $[1, \infty)$ a obor hodnot této funkce je $[0, \infty)$, musí tedy platit
$$1 \leq \frac{x^2}{2x-1}.$$
To je splněno pro $x > \frac{1}{2}$ a tedy $D_f = (\frac{1}{2}, \infty)$. Speciálně dostáváme, že f není sudá, lichá, ani periodická. Spočteme limity v krajních bodech
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{argcosh}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right) = \lim_{y\to\infty} \operatorname{argcosh} y = \infty,$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} \operatorname{argcosh}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right) = \lim_{y\to\infty} \operatorname{argcosh} y = \infty.$$
Není úplně těžké si všimnout, že
$$f(1) = \operatorname{argcosh} 1 = 0.$$
Protože je funkce argcosh nezáporná a funkce $f(x)$ spojitá, nabývá tedy všech mezihodnot a obor hodnot je tedy $H_f = [0, \infty)$. Ihned také vidíme, že funkce $f(x)$ nabývá globálního minima pro $x = 1$ a minimum je $f(1) = 0$. Funkce nemá globální maximum, protože je neomezená.
Nyní spočteme první derivaci. Pro $x \neq 1$ máme
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)^2 - 1}}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)^2 - 1}} \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{\sqrt{(x^2)^2 - (2x-1)^2}} = \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{|x-1|\sqrt{x^2+2x-1}}$$
Vidíme tedy, že
$$f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1), \\ > 0 & x \in (1, \infty) \end{cases}$$
A tedy f je klesající na $(\frac{1}{2}, 1)$ a rostoucí na $(1, \infty)$. Spočítáme ještě derivaci zleva a zprava v bodě $x = 1$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{|x-1|\sqrt{x^2+2x-1}} = -\sqrt{2},$$
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1_+} \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{|x-1|\sqrt{x^2+2x-1}} = \sqrt{2}$$
a spočítáme ještě limity derivace v krajních bodech definičního oboru
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}+} \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{|x-1|\sqrt{x^2+2x-1}} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x-1} \frac{x-1}{|x-1|\sqrt{x^2+2x-1}} = 0.$$

Protože $f(x) \to \infty$ pro $x \to \infty$, vidíme, že asymptota v nekonečnu neexistuje.
Spočteme ještě druhou derivaci (pro $x \neq 1$)

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \operatorname{sgn}\,(x-1)\left(\frac{2x}{2x-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\right)' \\
&= \operatorname{sgn}\,(x-1)\left(\left(\frac{2x}{2x-1}\right)'\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}+\frac{2x}{2x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\right)'\right) \\
&= \operatorname{sgn}\,(x-1)\left(\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\frac{x}{2x-1}\frac{2x+2}{(x^2+2x-1)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že

$$
f''(x)\begin{cases} >0 & x \in (\frac{1}{2},1), \\ <0 & x \in (1,\infty) \end{cases}
$$

a funkce f je tedy konvexní na intervalu $(\frac{1}{2},1)$ a konkávní na intervalu $(1,\infty)$.